

分形生成的递归细化算法及应用

丁 玮

齐东旭

(中国科学院计算技术研究所 CAD 开放实验室, 北京 100080) (北方工业大学 CAD 研究中心, 北京 100041)

摘 要 在分析 de Rham 方法、割角法及四点法的各自优势的基础上, 提出一类新的递归细化算法, 即我们称谓的两点格式。用这种新的算法可快捷灵活地构造分形, 使之在非规则几何形态的仿真、视幻作品制作、艺术设计等领域中得到应用。

关键词 分形, 递归, 细化, 计算机辅助几何设计, 线画艺术

1 引 言

递归细化算法, 诸如逐次加密、区间子分割技术等, 在计算机辅助几何设计中, 受到极大的关注。早在 50 年代, G. de Rham 关于微分几何的论文^[1]便给出了一种加密数据点的算法。在较长的一段时间内, de Rham 算法并未引起广泛的注意。70 年代中期, CAD/CAM 蓬勃兴起, 以 G. M. Chaikin, R. F. Riesenfeld 为代表, 又重新研究了 de Rham 早年就已给出的结果, 在光滑曲线与曲面的快速生成方面取得了成功的应用^[2,3]。几乎同时, 金通光、梁友栋等独立地探讨过递归细化技术, 仔细研究了收敛性^[4,5], 并有效的应用于几何造型的实际问题。金通光等人形象地称之为割角法。

割角技术是对初始数据点的逐次平滑磨光过程。如果给定有序点列 $P_0, P_1 \dots P_n$, 它们形成了一个多边形, 那么顾名思义, 割角法就是在选定的参数之下, 将该多边形的顶角切掉, 得到新的多边形, 它与原来的多边形相比, 顶点数目增至 2 倍。这个过程反复进行下去, 在一定分辨率之下便是曲线的良好逼近。对给定数据而言, 割角法是磨光型算法, 它不是插值型的。

割角法与样条磨光法、Bezier 磨光法相比, 前者并不强调逼近曲线(曲面)的表达式。事实上也不知

道表达式是什么, 也正因为如此, 逼近曲线(面)的类属扩大, 增加了应用上的灵活性。与割角法异曲同工, M. Sato 和 N. Dyn 等人独立给出一种简捷的四点法^[6,7], 它利用初始多边形的相邻四个顶点, 确定一个新的顶点, 将新产生的顶点依序嵌入原来的顶点集合, 并反复迭代。四点法在光滑曲线(面)造型中得到了有趣的应用^[8,9]。四点法是插值型的。

本文在分析 de Rham 方法、割角法及四点法的各自优势的基础上, 提出一类新的递归细化算法。尤其重要的是这种新的算法可快捷灵活地构造分形, 使之在非规则几何形态的仿真、视幻作品制作、艺术设计等领域中得到应用。

2 传统算法的推广

首先将文献[1]中的 de Rham 算法进行改写, 设 $\{P_i^{(0)}\}_{i \in Z}$ 为初始点列, 逐次细化的点列记为 $\{P_i^{(m)}\}_{i \in Z}, m=1, 2, \dots$, 它满足如下规则:

$$P_{2i-1}^{(m)} = \frac{\lambda}{2\lambda+1} P_{i-1}^{(m-1)} + \frac{\lambda+1}{2\lambda+1} P_i^{(m-1)} \quad (1)$$
$$P_{2i}^{(m)} = \frac{\lambda+1}{2\lambda+1} P_{i-1}^{(m-1)} + \frac{\lambda}{2\lambda+1} P_i^{(m-1)}$$

其中实数 $\lambda > 0$ 为参数。容易看出, 连结 $P_{2i-1}^{(m)}, P_{2i}^{(m)}$ 的线段位于连结 $P_{i-1}^{(m-1)}, P_i^{(m-1)}$ 的线段的内部。由此可见, de Rham 及割角法的关键性条件是 $\lambda > 0$ 。

现在我们突破 $\lambda > 0$ 的限制。令 $\frac{\lambda}{2\lambda+1} = t$, 则式

(1)写成:

$$\begin{aligned}
 P_{2i-1}^{(m)} &= tP_{i-1}^{(m-1)} + (1-t)P_i^{(m-1)} \\
 P_{2i}^{(m)} &= (1-t)P_{i-1}^{(m-1)} + tP_i^{(m-1)}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

现在,作为参数的 t ,取值不限于 $[0,1]$,并且特别注意 $t < 0$ 的情形。这样作的后果将产生具有自相似结构的分形。例如,取 $P_i^0 = P_{i \pmod k}^0, k \in Z$,则由式(2)生成的分形如图1所示。

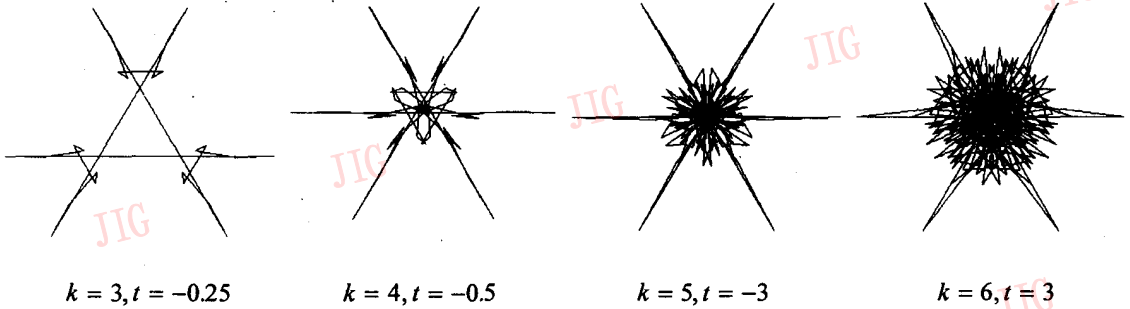


图1 按算法(2)生成的分形

Fig.1 Fractal generated by algorithm (2)

传统的四点法计算格式为

$$\begin{aligned}
 P_{2i}^{(m)} &= P_i^{(m-1)} \\
 P_{2i+1}^{(m)} &= (1-t) \frac{P_i^{(m-1)} + P_{i+1}^{(m-1)}}{2} + \\
 &\quad t \frac{P_{i-1}^{(m-1)} + P_{i+2}^{(m-1)}}{2}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

其中 t 为参数,并且在通常的应用中,取 $t < 0$,可以得到 C^1 类曲线的逼近^[9]。现在,我们取 $t > 0$,对于 $\{P_i^{(0)}\}_{i \in Z}$ 的初始点集,假定 $P_i^{(0)} = P_{i \pmod k}^{(0)}, k \in Z$,则式(3)给出的图形见图(2)

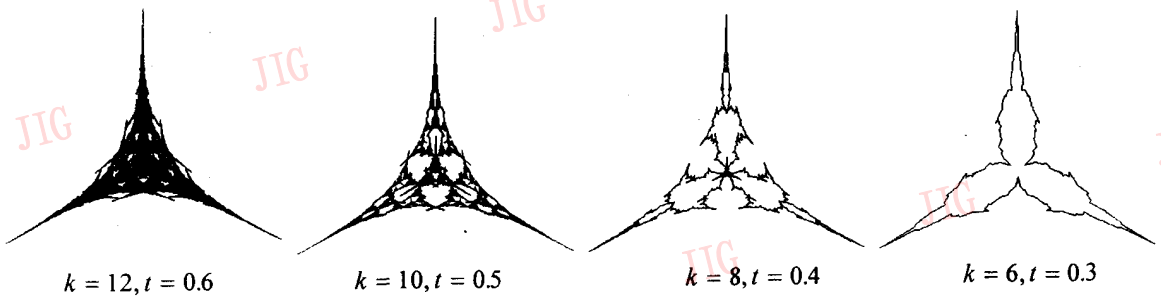


图2 按算法(3)生成的分形

Fig.2 Fractal generated by algorithm (3)

按算法(2)产生的点集,受限于前一步迭代中的相邻两点,故称之为两点格式^[10]。在CAGD中,由于两点格式有太强的局部性而不易被接受,但在分形生成的技术中,两点格式却应得到重视。事实上,分形生成中的生成元(generator)法及L系统正是立足于两点算法^[10]。因此,我们在下一节中,给出一类新的两点格式。

3 递归细化两点格式

我们的目的是构成点集序列 $S_m = \{P_i^{(m)}\}, i \in Z$,使 $S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_m \subset \dots$ 。从 S_{m-1} 生成 S_m 的一般形式为

$$\begin{aligned}
 P_i^{(m)} &= F(\alpha_1^{m-1}, \alpha_2^{m-1}, \dots, \alpha_m^{m-1}; \\
 &\quad \beta_1^{(m-1)}, \beta_2^{(m-1)}, \dots, \beta_m^{(m-1)}; P_{i-1}^{(m-1)}, P_i^{(m-1)}
 \end{aligned}$$

其中 $\alpha_j^{m-1}, \beta_j^{(m-1)}$ 为参数,分别用以确定 $P_{i-1}^{(m-1)}$,

$P_i^{(m-1)}$ 连线上的标识点位置及从标识点处离开 $P_{(i-1)}^{(m-1)}, P_i^{(m-1)}$ 连线的长度,其中标识点如下选取

$$\omega_{ij}^{(m-1)} = (1 - \alpha_j^{(m-1)})P_{(i-1)}^{(m-1)} + \alpha_j^{(m-1)}P_i^{(m-1)},$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$

参数 $\beta_1^{(m-1)}, \beta_2^{(m-1)}, \dots, \beta_m^{(m-1)}$ 由用户在 $[-\beta, \beta]$ 上选取 ($\beta > 0$). 为了给出实现上述原则的一类具体的两点格式,令

$$P_1^{(m-1)} - P_{i-1}^{(m-1)} = (\xi_i^{(m-1)}, \eta_i^{(m-1)})$$

$$\rho_1^{(m-1)} = (\eta_i^{(m-1)}, -\xi_i^{(m-1)}),$$

$$e_i^{(m-1)} = \rho_1^{(m-1)} / \|\rho_1^{(m-1)}\|$$

则有算法

$$P_{ij}^{(m)} = \omega_{ij}^{(m-1)} + \beta_j^{(m-1)}e_i^{(m-1)}, j = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

在文献[11]考虑的空间形式的加细算法中,代替 $e_i^{(m-1)}$ 的是

$$e_{1j}^{(m-1)} = (1 - \theta_j^{(m-1)})e_{1j}^{(m-1)} + \theta_j^{(m-1)}e_{mj}^{(m-1)}$$

其中

$$e_{1j}^{(m-1)}, e_{mj}^{(m-1)} \perp (p_j^{(m-1)} - P_{j-1}^{(m-1)})$$

$$e_{1j}^{(m-1)} \in \text{span}\{p_{j-2}^{(m-1)}, P_{j-1}^{(m-1)}, P_j^{(m-1)}\}$$

$$e_{mj}^{(m-1)} \in \text{span}\{p_{j-1}^{(m-1)}, P_j^{(m-1)}, P_{j+1}^{(m-1)}\}$$

对参数 $\alpha_j^{(m-1)}$ 与 $\beta_j^{(m-1)}$ 的适当选取将给出典型的分

形集:

(1) von Koch 曲线:标识点数目 $m=3$ 。 $\alpha_j^{(m-1)} = \alpha_j$, $\beta_j^{(m-1)} = \beta_j, j=1, 2, 3$, 且

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{1}{3};$$

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} \|p_i^{(m-1)} - P_{i-1}^{(m-1)}\|, \beta_3 = 0.$$

(2) Minkowski 曲线:标识点数目 $m=7$ 。 $\alpha_j^{(m-1)} = \alpha_j$, $\beta_j^{(m-1)} = \beta_j, j=1, 2, \dots, 7$, 且

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{4}, \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \frac{1}{2}, \alpha_6 = \alpha_7 = \frac{3}{4};$$

$$\beta_1 = \beta_4 = \beta_7 = 0,$$

$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_5 = \beta_6 = \|P_i^{(m-1)} - P_{i-1}^{(m-1)}\| / 4.$$

(3) 龙曲线:标识点数目 $m=1$ 。 $\alpha_1 = \frac{1}{3}, \beta_1^{(m)} =$

$$\frac{(-1)^{m+i}}{2} \|P_i^{(m-1)} - P_{i-1}^{(m-1)}\|.$$

(4) Sierpinski 曲线:标识点数目 $m=2$ 。 $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 =$

$$\frac{3}{4}, \beta_1^{(m)} = \beta_2^{(m)} = (-1)^{(m+i)} \frac{\sqrt{3}}{4} \|P_i^{(m-1)} - P_{i-1}^{(m-1)}\|.$$



图 3 递归细化两点格式生成的典型分形

Fig. 3 Typical fractal generated by recursive refinement 2-point format

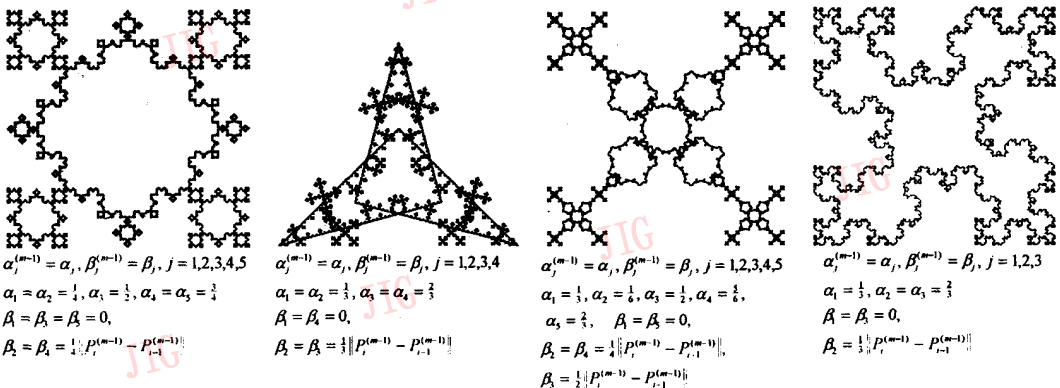


图 4 递归细化两点格式生成的分形

Fig. 4 Fractal generated by recursive refinement 2-point format

4 绘制技术

在文献[12]中,结合着色技巧给出一些分形生成图例。本节将讨论基于递归细化算法的绘制技术。在图象生成过程中,前述算法提供了基础拓扑结构。我们研究的是另一种约束条件下的绘制。

(1) 图元映射 递归细化过程给出了点集序列 $\{S_j\}$ 。对于指定的点 $P \in \{S_j\}$, 将一个图元置于 P 所指示的位置。这里所说的图元,是诸如圆、矩形、线段之类的独立图形。图元由象素构成,指定其中某一个

象素为其特征点,使该特征点与 P 重合,然后对图元作指定的缩放或旋转使之定位。图元由用户定义,使用者可以作成一个图元库。

(2) 分层叠加 通常将 $S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_m$ 作为绘制的结果。当 $i \neq j$ 时, S_i 与 S_j 的图元选择不同,这种绘制可以产生极其复杂的图象。

(3) 位置控制 对于每一个点 P ,可以由此点的位置来控制选择图元。具体地,可以定义关于点 P 的坐标 (x, y) 的二元函数 $Z = f(x, y)$,对不同的点根据函数值来选择绘制不同的图元。



图5 绘制技术例

Fig. 5 Examples of drawing techniques

5 递归细化两点格式的一个应用:建立线画艺术的数学模型

线画艺术这种独特的艺术形式是由德国卡塞尔大学工业设计系主任 H. Delinger 教授创建的^[13,14],其线画艺术作品出现在世界各地许多展览会和学术交

流活动中。线画艺术在工业设计的教学和实践起着重要的作用。由于线画艺术作品由大量的折线段构成,这就使得它便于在计算机上实现。H. Delinger 虽然创建了这种艺术形式,却未能清晰地给出数学上的描述。作为递归细化两点格式的一个应用,我们在这里建立线画艺术的一种数学模型。



图6 线画艺术作品

Fig. 6 Works of Line-art

线画艺术作品可以是二维的或三维的(如图6所示^[13]),在这里我们仅讨论二维的情形。线画作品可以描述为折线的集合 $\{L_j\}$, $j=1, 2, \dots, N$; $N \gg 1$ (这里 N 为非常大的整数,如 $N=10^4$ 或 $N=10^5$)。

集合中的每条折线 L_j 具有如下性质:

(1) 折线 L_j 中所包含的线段数目 n_j 取自集合 $\{m, m+1, m+2, \dots, m+n\}$, 这里整数 $m > 0, n > 0$ 由用户定义;

(2) 给定旋转角度 $\theta_j(0), \theta_j(1), \dots, \theta_j(n_j-1)$, $\theta_j(0)$ 是 L_j 中第一条线段的旋转角度, $\theta_j(1), \dots, \theta_j(n_j-1)$ 是随机的, $\Delta\theta_j(s) = \theta_j(s+1) - \theta_j(s), s = 0, 1, \dots, n_j-1$, 限制在区间 $[-\alpha, \alpha], \alpha > 0$;

(3) L_j 中线段的长度 $l_j(0), l_j(1), \dots, l_j(n_j-1)$ 在区间 $[a, b], b > a > 0$ 中随机选取, 这里 a 和 b 由用户定义;

(4) 要对所有的折线 L_j 进行操作。

在这里我们从递归细化两点格式出发, 建立了线画艺术的边界模型。除初始点之 $Q_0 \in R_0$ 外, 我们

还对 P_j 的终点给出条件, $P_j(n_j) = Q_i \in R_i, j = 1, 2, \dots, N, R_i$ 是定义在用户给出的空间中。设 $P_{j,k}^{(m)}$ 为由 $P_k^{(m-1)}, P_{k-1}^{(m-1)}$ 及 $P_0^{(0)} = Q_0$ 产生的第 j 个点。方法如下:

$$P_{j,k}^{(m)} = \tilde{P}_{j,k}^{(m-1)} + \beta_j e_k^{(m-1)}$$

$$\tilde{P}_{j,k}^{(m-1)} = (1 - \alpha_j) P_k^{(m-1)} + \alpha_j P_{k-1}^{(m-1)}$$

$$e_k^{(m-1)} \perp (P_k^{(m-1)} - P_{k-1}^{(m-1)}),$$

$$j = 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots$$

其中参数 β_j 是随机产生的, 满足 $-1 < \beta_j < 1$ 并能由用户控制。

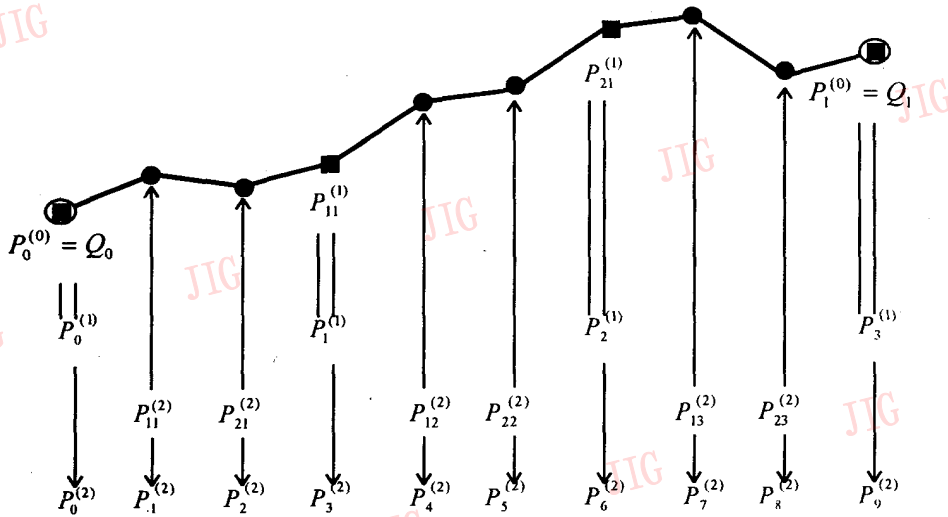


图 7 线画艺术的边界模型, 其中 $m=2, j=1, 2$

Fig. 7 Boundary model of Line-art, where $m=2, j=1, 2$



图 8 递归细化两点格式产生的线画艺术作品

Fig. 8 Line-art works generated by recursive refinement 2-point format

参考文献

- 1 de Rham G., Sur une courbe plane, J. Mathem. Pure Appl. 1956, 35: 25~42.
- 2 Chaikin G M. An algorithm for high speed curve generation, Computer Graphics and Image processing, 1974, 3: 346~349.
- 3 Riesenfeld R F. On Chaikin's algorithm, Computer Graphics and

Image Processing, 1975, 4: 304~310.

- 4 金通光. 逐次割角的曲线生成技术. 第二届中国计算几何学术会议报告, 1984.
- 5 Lu Wei, Jin Tongguang, Liang Youdong. Geometric modelling by recursively cutting vertices, J. of Comput. Sci&Technol., 1989, 4(4).
- 6 Sato M. Recursive interpolation, Science on Form (Ishizaka, S. eds.), KTK Scientific Publishers, Tokoy, 1987.

- 7 Dyn N, Levin D, Gregory J A. A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design, CAGD, 1987, (4).
- 8 朱松. 四点法——一种离散造型方法[博士论文]. 上海: 复旦大学, 1992.
- 9 Qu Ruibin, Curve and surface interpolation by subdivision algorithms, Pacific Graphics'94/CADDM'94, Beijing, 1994.
- 10 齐东旭. 分形及其计算机生成. 北京: 科学出版社, 1994.
- 11 李华山. 调配函数准则及其应用. 中国电工技术学会计算机应用论文集, 北京, 1996, (5).
- 12 侯丹梅. 计算机辅助几何造型方法及其应用研究[硕士论文]. 成都: 四川联合大学, 1996.
- 13 Delinger H. Design Kunst Computer, Verlag Jenior & Presler, Kassel 1991, 75-90.
- 14 Delinger H, Qi Dongxu, Mathematical Modeling of D-Curves, LINE ART: Algorithmic Experiments and Exploration into Pictorial Spaces Composed of Lines, Proc. Of Fourth International Symposium on Electronic Art, Minneapolis, U. S. A. 1993, 11~12.



丁玮, 1994年毕业于吉林大学计算机科学系, 后于该校获理学硕士, 现为中国科学院计算技术研究所CAD开放实验室博士研究生。主要研究方向: 计算机辅助几何设计、计算机图形学、图象处理等。



齐东旭, 教授、博士生导师。1963年毕业于吉林大学数学系, 现任北方工业大学CAD研究中心主任。主要研究方向: 计算机图形学、数值分析、计算机辅助几何设计、图象处理等。

Recursive Refinement Algorithm of Fractal Generation and it's Application

Ding Wei, Qi Dongxu

(CAD Laboratory, Institute of Computing Technology, Academia Sinica, Beijing 100080)

(CAD Research Center, North China University of Technology, Beijing 100041)

Abstract This paper gives a new kind of recursive refinement algorithm which based on the analysis about the advantages of de Rham method, cut angles method and 4-point method. It is agile to generate fractal by using the new algorithm. It can be widely used in the field such as irregular geometry shape simulation, visual magic works manufacture, art design.

Keywords Fractal, Recursion, Refinement, Computer aided geometric design, Line-art